



Analytical Solutions of One-Dimensional Linear Differential Equations of Dynamics of Channel Flows of Semi-Bounded Extent for the Case of Kinematic Waves

By Dr. Yu. G. Ivanenko

Abstract- In the article the mathematical problem of hydraulic calculation of parameters of unsteady flow of water flows in the lower reaches of the spillway hydrosystems is considered. An algorithm based on an analytical method for solving a linearized system of one-dimensional partial differential equations of hyperbolic type of channel flow dynamics riverbed process is constructed for a mathematical problem.

Control and direct measurement of the characteristics of hydraulic processes in natural conditions are difficult, which requires the use of mathematical modeling and simulation studies of transient processes.

Using the theory of the complete integral, a hydraulic calculation of flow rate changes and channel bottom marks in the calculation range.

Hydraulic calculation is carried out according to the analytical formulas derived in the work.

GJSFR-A Classification: LCC: TC1695, QA372



Strictly as per the compliance and regulations of:



Analytical Solutions of One-Dimensional Linear Differential Equations of Dynamics of Channel Flows of Semi-Bounded Extent for the Case of Kinematic Waves

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ РУСЛОВЫХ ПОТОКОВ ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ПРОТЯЖЕННОСТИ ДЛЯ СЛУЧАЯ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ВОЛН

Dr. Yu. G. Ivanenko

Abstract- In the article the mathematical problem of hydraulic calculation of parameters of unsteady flow of water flows in the lower reaches of the spillway hydrosystems is considered. An algorithm based on an analytical method for solving a linearized system of one-dimensional partial differential equations of hyperbolic type of channel flow dynamics riverbed process is constructed for a mathematical problem.

Control and direct measurement of the characteristics of hydraulic processes in natural conditions are difficult, which requires the use of mathematical modeling and simulation studies of transient processes.

Using the theory of the complete integral, a hydraulic calculation of flow rate changes and channel bottom marks in the calculation range.

Hydraulic calculation is carried out according to the analytical formulas derived in the work.

1. INTRODUCTION

Дифференциальные уравнения, описывающие одномерное течение воды в открытых размываемых руслах предполагают использование следующих упрощающих предпосылок:

- Скорости постоянны в пределах каждого сечения потока. Для учета неравномерного распределения скоростей по поперечному сечению потока вводится корректив
- Давление в потоке подчиняется гидростатическому закону.
- Влияние турбулентного перемешивания воды и трения о стенки русла учитывается введением силы сопротивления с помощью известного соотношения Шези.
- Течение воды в русле подчиняется условию плавной изменяемости.

Естественные водотоки характеризуются относительно малыми количествами транспортируемой твердой взвеси. Поэтому для них уравнение движения

смеси практически не будет отличаться от уравнений движения чистой жидкости /4/.

Исследование движения взвешенного потока предполагает использование закона сохранения вещества и закона изменения импульса для потока смеси - дисперсоида /6/.

Закон сохранения вещества записывается отдельно для жидкости в виде уравнения неразрывности и для твердой взвеси в виде уравнения деформации.

Закон изменения импульса осуществляется для случая реального движения воды, способного передавать касательные напряжения окружающей среде, относительно которой она движется и рассматривается для сил, действующих на единицу массы воды.

Таким образом, для случая одномерного течения воды в размываемых руслах система дифференциальных уравнений динамики русловых процессов может быть представлена в виде /2/:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + 2U \frac{\partial Q}{\partial x} - U^2 \frac{\partial \omega}{\partial x} + g\omega \frac{\partial y}{\partial x} + g \frac{Q^2}{\omega C_{ш} H} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} + (1 - \varepsilon) \gamma' B \frac{\partial z}{\partial t} = 0. \quad (3)$$

Здесь x – продольная координата; t – время; y – высота свободной поверхности воды; z – высота дна водотока; Q – расход воды; ω – площадь поперечного сечения потока; B – ширина водотока по верху; H – средняя глубина воды водотока; U – средняя скорость течения воды; $C_{ш}$ – коэффициент Шези; G – средний весовой расход транспортируемых руслоформирующих

Author: e-mail: pavodok37@mail.ru

наносов; ε – коэффициент пористости донных отложений; γ' – удельный вес транспортируемых твердых частиц наносов; g – ускорение силы тяжести.

Коэффициент Шези рассчитывается в работе по формуле:

$$C_{\text{ш}} = \frac{1}{n} R^{1/6}, \quad (4)$$

где n – коэффициент шероховатости; R – гидравлический радиус.

Поток воды в размываемом русле вызывает перемещение твердых частиц наносов в направлении течения.

Обычно рассматривается несколько способов перемещения наносов: влечением по дну, сальтацией и во взвешенном состоянии. Однако, четкой, определенной границы между этими способами перемещения частиц наносов не существует.

Впервые И.В.Егизаров [5] рассмотрел единый механизм перемещения потоком воды твердых частиц, не прибегая к традиционному делению наносов на влекомые и взвешенные. Им было получено уравнение для полного твердого расхода наносов, как при влечении, так и при взвешивании.

Аналогичный единый механизм перемещения руслоформирующих наносов рассмотрел Ю.Г.Иваненко [2,3].

Для замыкания системы уравнений (1), (2) и (3) в работе используется обобщенное уравнение транспортирования потоком руслоформирующих наносов Иваненко Ю.Г. [2,3], записанное в виде:

$$\frac{(\gamma' - \gamma)}{\gamma'} G \bar{W} R = \xi \gamma \frac{U^4 h B}{C_{\text{ш}}^2}. \quad (5)$$

Здесь $\bar{W}$ – средняя гидравлическая крупность транспортируемых руслоформирующих наносов; $\xi = 0.057$ – доля энергии потока, которая расходуется на транспортирование потоком руслоформирующих наносов; γ' и γ – удельный вес твердых частиц наносов и воды.

В приведенной системе уравнений (1), (2) и (3), выбор необходимого числа функций можно комбинировать, используя для этой цели соотношения:

$$y = H + z, \quad Q = UBH. \quad (6)$$

Уравнение деформации русла (3) получено в предположении, что ширина водотока по верху B изменяется вдоль потока незначительно, а русловые деформации проявляются главным образом в изменении отметок дна русла. Таким образом, полагаем в процессе расчетов $B = \text{const.}$ –

Используя соотношения (4), (5), (6), преобразуем систему дифференциальных уравнений (1), (2) и (3) к виду:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + 2U \frac{\partial Q}{\partial x} + \left(\frac{g\omega}{B} - U^2 \right) \frac{\partial \omega}{\partial x} + g\omega \frac{\partial Z}{\partial x} + gB \frac{Q^2}{\omega^2 C_{\text{ш}}^2} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - U \frac{\partial \omega}{\partial x} + F \frac{\partial Z}{\partial t} = 0, \quad (9)$$

Здесь
$$F = (1 - \varepsilon) \frac{(\gamma' - \gamma) C_{\text{ш}}^2 \bar{W} \omega}{\xi \gamma 4U^3} \quad (10)$$

Полученная система дифференциальных уравнений в частных производных (7), (8) и (9) с тремя неизвестными функциями Q , ω , Z , зависящими от двух независимых переменных x , t , может быть линеаризована.

Процесс линеаризации одномерных дифференциальных уравнений динамики русловых потоков состоит в разложении параметров нестационарного течения воды при малых возмущениях на составляющие в виде

$$Q = Q_0 + \Delta Q, \quad \omega = \omega_0 + \Delta \omega, \quad Z = Z_0 + \Delta Z \quad (11)$$

и отбрасывании высших степеней и произведений возмущений ΔQ , $\Delta \omega$, ΔZ и их производных. Параметры с индексом «0» соответствуют условиям невозмущенного стационарного течения.

Для стационарного течения воды справедливы выражения:

$$\left(\frac{g\omega_0}{B_0} - U_0^2 \right) \frac{\partial \omega_0}{\partial x} + g\omega_0 \frac{\partial Z_0}{\partial x} + gB_0 \frac{Q_0^2}{\omega_0^2 C_{\text{ш}}^2} = 0, \quad (12)$$

$$Q_0 = \text{const.} \quad (13)$$

В качестве начального невозмущенного течения будем рассматривать движение воды в призматическом русле, для которого справедливы следующие условия:

$$\frac{\partial \omega_0}{\partial x} = 0; \quad -\frac{\partial Z_0}{\partial x} = \frac{Q_0^2}{\omega_0^2 C_{\text{ш}}^2 H_0}. \quad (14)$$

Применив соотношения (13), можно получить следующие линейные дифференциальные уравнения возмущенного движения жидкости [2]:

$$\frac{\partial \Delta Q}{\partial t} + 2U_0 \frac{\partial \Delta Q}{\partial x} + (C_0^2 - U_0^2) \frac{\partial \Delta \omega}{\partial x} + g\omega_0 \frac{\partial \Delta Z}{\partial x} + \beta \Delta Q - \lambda \Delta \omega = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \Delta Q}{\partial x} + \frac{\partial \Delta \omega}{\partial t} = 0, \quad (16)$$

Вводя оператор (22) в уравнение неразрывности (15), получаем

$$\frac{\partial \Delta Q}{\partial x} - U_0 \frac{\partial \Delta \omega}{\partial x} + \bar{F}_0 \frac{\partial \Delta Z}{\partial t} = 0. \quad (17)$$

$$-\bar{C}_0 B_0 \frac{\partial \Delta H}{\partial x} + \frac{\partial \Delta Q}{\partial x} = 0. \quad (23)$$

После интегрирования дифференциального уравнения

$$\text{Здесь} \quad C_0 = \sqrt{g \frac{\omega_0}{B_0}}, \quad (18)$$

$$\frac{d\Delta Q}{B_0 d\Delta H} = \bar{C}_0 \quad (24)$$

можно получить функцию

$$\beta = \frac{2g}{\omega_0} \frac{Q_0}{C_{ш0}^2 R_0}, \quad \lambda = \frac{Q_0^2}{\omega_0^2 C_{ш0}^2 R_0} (g - C_0^2 \Phi), \quad (19)$$

$$\Delta Q = \bar{C}_0 B_0 \Delta H + A, \quad (25)$$

где A – постоянная.

Формула (24) является модификацией формулы Бретона [7,8]. Физически она означает скорость распространения расхода. Для малых возмущений расхода и уровня воды постоянная $A=0$.

Используя соотношение (24), преобразуем систему уравнений (15), (17), к виду:

$$\bar{F}_0 = (1 - \varepsilon) \frac{(\gamma' - \gamma)}{\xi \gamma} \frac{C_{ш0}^2 \bar{W} \omega_0}{4U_0^3} \quad (20)$$

Для русла, имеющего прямоугольную форму поперечного сечения, значение параметра Φ определяется из соотношения [2]:

$$\Phi = (1 + 2y) \left(-\frac{B_0}{H_0 (B_0 + 2H_0)} \right), \quad (21)$$

где b – ширина русла по дну; m – заложение откоса.

Кинематическими волнами называются длинные волны, при распространении которых в открытом водотоке сохраняется однозначная связь между расходом и уровнем воды. Кинематические волны называются также моноклиальными волнами или волнами со стационарным профилем. Теория этих волн может быть применена для исследования волн паводка на реках, а также для расчета общего размыва русла.

Будем рассматривать уравнения динамики русловых потоков в виде (15), (16), (17) полагая, что допущение о сохранности однозначной связи между расходом и уровнем воды идентично тому, что ищется решение для ΔH и ΔQ в виде функции типа $f(X - \bar{C}_0 t)$, где $\bar{C}_0$ – постоянная. Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\bar{C}_0 \frac{\partial}{\partial X}. \quad (22)$$

$$\frac{\partial \Delta Q}{\partial t} + \bar{C}_0 \frac{\partial \Delta Q}{\partial x} + g\omega_0 \frac{\partial \Delta Z}{\partial x} = \frac{(\lambda - \beta \bar{C}_0)}{\bar{C}_0} \Delta Q, \quad (26)$$

$$(\bar{C}_0 - U_0) \frac{\partial \Delta Q}{\partial x} + \bar{C}_0 \bar{F}_0 \frac{\partial \Delta Z}{\partial t} = 0 \quad (27)$$

Получена система одномерных дифференциальных уравнений гиперболического типа динамики русловых потоков, которые могут быть применены для расчета общего размыва русла кинематическими волнами.

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение с частными производными для одной неизвестной функции Z двух независимых переменных X и Y [1,2,9]:

$$f(X, Y) \frac{\partial Z}{\partial X} + g(X, Y) \frac{\partial Z}{\partial Y} = h(X, Y). \quad (28)$$

Введем обозначения:

$$f(X, Y) = f, \quad g(X, Y) = g, \quad h(X, Y) = h$$

Коэффициенты f , g , h определены и непрерывны в некоторой односвязной области

координат (X, Y) , имеют непрерывные частные производные первого порядка и $|f| + |g| > 0$.

Сформулируем задачу Коши. Пусть требуется найти решение уравнения (28), удовлетворяющее функции

$$U = U(t) \text{ при } X = X(t). \quad (29)$$

Для решения задачи Коши по полному интегралу следует функцию (29) подставить в уравнение полного интеграла и полученное уравнение продифференцировать по независимой переменной t /1,2,9/. Из двух выведенных уравнений далее необходимо исключить независимую переменную t . Это приводит к получению соотношения между постоянными параметрами α и β в виде $\beta = \omega(\alpha)$.

Таким образом, можно определить семейство интегральных поверхностей, зависящее от одного параметра:

$$U = \phi(X, t, \alpha, \omega(\alpha)). \quad (30)$$

Продифференцируем (30) по параметру α и приравняем полученное соотношение нулю:

$$\frac{\partial \phi(X, t, \alpha, \omega(\alpha))}{\partial \alpha} = 0. \quad (31)$$

Исключив из двух полученных соотношений (30), (31) параметр α , получим решение искомой задачи Коши.

Линейные дифференциальные уравнения динамики русловых потоков для случая кинематических волн получены в виде (26) и (27). В этих уравнениях параметры ΔQ и ΔZ носят название малых возмущений расхода и отметки дна водотока и отвечают режиму неустановившегося течения для случая кинематических волн. Они характеризуют изменение этих параметров относительно начального положения. Параметры с индексом «0» отвечают режиму невозмущенного установившегося течения воды.

Преобразуем дифференциальные уравнения (26), (27) к виду /2/:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta Q}{\partial t} + \bar{C}_0 \frac{\partial \Delta Q}{\partial x} + g\omega_0 \frac{\partial \Delta Z}{\partial x} = \\ = \bar{\Pi}_0 \left\{ 2 \left[\frac{\bar{C}_0}{2} - \sqrt{\left(\frac{\bar{C}_0}{2} \right)^2 + g\omega_0 \frac{(\bar{C}_0 - U_0)}{\bar{C}_0 \bar{F}_0}} \right] \Delta Q + 2g\omega_0 \Delta Z \right\}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$(\bar{C}_0 - U_0) \frac{\partial \Delta Q}{\partial x} + \bar{C}_0 \bar{F}_0 \frac{\partial \Delta Z}{\partial t} = 0, \quad (33)$$

$$\bar{\Pi}_0 = - \frac{(\lambda - \beta \bar{C}_0) \Delta Q}{\bar{C}_0 \left\{ 2 \left[\frac{\bar{C}_0}{2} - \sqrt{\left(\frac{\bar{C}_0}{2} \right)^2 + g\omega_0 \frac{(\bar{C}_0 - U_0)}{\bar{C}_0 \bar{F}_0}} \right] \Delta Q + 2g\omega_0 \Delta Z \right\}}, \quad (34)$$

где $\bar{\Pi}_0$ - осредненное значение возмущений по расходу и отметке дна водотока на участке дифференцирования;

$$\bar{C}_0 = (U_0 + C_0), \quad (35)$$

Здесь $\bar{C}_0$ - скорость распространения волны возмущения расхода для случая кинематических волн. Введем обозначения:

$$D = \sqrt{\left(\frac{\bar{C}_0}{2} \right)^2 + g\omega_0 \frac{(\bar{C}_0 - U_0)}{\bar{C}_0 \bar{F}_0}}, \quad \Gamma = \frac{\bar{C}_0}{2}. \quad (36)$$

Вместо системы уравнений (26), (27) будем решать преобразованную систему (33), (34):

$$\frac{\partial \Delta Q}{\partial t} + \bar{C}_0 \frac{\partial \Delta Q}{\partial x} + g\omega_0 \frac{\partial \Delta Z}{\partial x} = \bar{\Pi}_0 \{ 2(\Gamma - D) \Delta Q + 2g\omega_0 \Delta Z \}, \quad (37)$$

$$(\bar{C}_0 - U_0) \frac{\partial \Delta Q}{\partial x} + \bar{C}_0 \bar{F}_0 \frac{\partial \Delta Z}{\partial t} = 0. \quad (38)$$

Подстановкой вида

$$\Delta Z = \frac{(D - \Gamma)}{g\omega_0} [\Delta Q + M e^{-2\bar{\Pi}_0(D - \Gamma)t} + L e^{2\bar{\Pi}_0 x}] \quad (39)$$

система уравнений (37), (38) приводится к одному гиперболическому дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка относительно функции $\Delta Q(x, t)$

$$\frac{\partial \Delta Q}{\partial t} + (D + \Gamma) \frac{\partial \Delta Q}{\partial x} = 2\bar{\Pi}_0(D - \Gamma) M e^{-2\bar{\Pi}_0(D - \Gamma)t}, \quad (40)$$

где M - постоянный параметр, определяемый из начальных условий.

Общим решением дифференциального уравнения (40) является соотношение в виде полного интеграла:

$$\Delta Q = \{ \Phi[x - (D + \Gamma)t] - M e^{-2\bar{\Pi}_0(D - \Gamma)t} + C \}, \quad (41)$$

где функция Φ и постоянный параметр C определяются из граничных условий.

Применив теорию полного интеграла, будем искать решение, описывающее процесс трансформации волны возмущения одного направления, движущейся в бесконечно длинном призматическом канале с начальным равномерным режимом течения воды.

Пусть для уравнения (41) граничные условия в створе возмущения задаются в виде

$$\Delta Q = K + P e^{-2\bar{\Pi}_0(D-\Gamma)t}, \quad \text{при } x = (D-\Gamma)T, \quad (42)$$

где K и P - постоянные параметры.

Подставив (42) в уравнение полного интеграла (41), найдем:

$$K + (P + M) e^{-2\bar{\Pi}_0(D-\Gamma)t} = \{\Phi[(D-\Gamma)T - (D+\Gamma)t] + C\} \quad (43)$$

Уравнение (43) продифференцируем по независимой переменной t :

$$e^{-2\bar{\Pi}_0(D-\Gamma)t} = \frac{\Phi(D+\Gamma)}{2\bar{\Pi}_0(D-\Gamma)(P+M)} \quad (44)$$

Из (44) найдем выражение для t в виде:

$$t = -\frac{1}{2\bar{\Pi}_0(D-\Gamma)} \ln \left| \frac{\Phi(D+\Gamma)}{2\bar{\Pi}_0(D-\Gamma)(P+M)} \right| \quad (45)$$

Исключив из двух соотношений (43) и (45) переменную t , определим значение постоянного параметра C :

$$K + \frac{\Phi(D+\Gamma)}{2\bar{\Pi}_0(D-\Gamma)} - \Phi(D-\Gamma)T - \frac{\Phi(D+\Gamma)}{2\bar{\Pi}_0(D-\Gamma)} \ln \left| \frac{\Phi(D+\Gamma)}{2\bar{\Pi}_0(D-\Gamma)(P+M)} \right| = C \quad (46)$$

Подставив (46) в уравнение (41), получим:

$$\Delta Q = \{\Phi[x - (D+\Gamma)t - (D-\Gamma)T] - M e^{-2\bar{\Pi}_0(D-\Gamma)t} + K + \frac{\Phi(D+\Gamma)}{2\bar{\Pi}_0(D-\Gamma)} - \frac{\Phi(D+\Gamma)}{2\bar{\Pi}_0(D-\Gamma)} \ln \left| \frac{\Phi(D+\Gamma)}{2\bar{\Pi}_0(D-\Gamma)(P+M)} \right|\} \quad (47)$$

Продифференцируем (47) по параметру Φ и полученное уравнение приравняем нулю

$$\frac{\partial \Delta Q}{\partial \Phi} = \{[x - (D+\Gamma)t - (D-\Gamma)T] - \frac{(D+\Gamma)}{2\bar{\Pi}_0(D-\Gamma)} \ln \left| \frac{\Phi(D+\Gamma)}{2\bar{\Pi}_0(D-\Gamma)(P+M)} \right|\} = 0 \quad (48)$$

Из (49) определим параметр Φ :

$$\Phi = \frac{2\bar{\Pi}_0(D-\Gamma)(P+M)}{(D+\Gamma)} e^{\frac{2\bar{\Pi}_0(D-\Gamma)}{(D+\Gamma)}[x - (D+\Gamma)t - (D-\Gamma)T]} \quad (49)$$

Подставив (49) в (47), получим искомое решение в виде:

$$\Delta Q = (P+M) e^{\frac{2\bar{\Pi}_0(D-\Gamma)}{(D+\Gamma)}[x - (D+\Gamma)t - (D-\Gamma)T]} - M e^{-2\bar{\Pi}_0(D-\Gamma)t} + K \quad (50)$$

Задаваясь граничными условиями:

$$\Delta Q = 0, \quad \text{при } t = T, \quad x = (D-\Gamma)T, \quad (51)$$

из (51) определим:

$$K = -P e^{-2\bar{\Pi}_0(D-\Gamma)T} \quad (52)$$

Подставив значение параметра (52) в соотношение (50), найдем:

$$\Delta Q = [(P+M) e^{\frac{2\bar{\Pi}_0(D-\Gamma)}{(D+\Gamma)}[x - (D+\Gamma)t - (D-\Gamma)T]} - M e^{-2\bar{\Pi}_0(D-\Gamma)t} - P e^{-2\bar{\Pi}_0(D-\Gamma)T}] \quad (53)$$

Пусть для уравнения (53) граничные условия в створе возмущения задаются в виде:

$$\Delta Q = \Delta Q_{\max}, \quad \text{при } t = \infty, \quad x = (D-\Gamma)T, \quad (54)$$

где $\Delta Q_{\max}$ - максимальное приращение величины расхода воды, равное расходу попуска. Из (50) определим:

$$K = \Delta Q_{\max}, \quad (55)$$

$$P = -\frac{\Delta Q_{\max}}{e^{-2\bar{\Pi}_0(D-\Gamma)T}} \quad (56)$$

Подставив параметры (55) и (56) в (50), найдем:

$$\Delta Q = \{ M [e^{\frac{2\bar{\Pi}_0(D-\Gamma)}{(D+\Gamma)}[x-(D+\Gamma)t-(D-\Gamma)T]} - e^{-2\bar{\Pi}_0(D-\Gamma)t}] - \frac{\Delta Q_{\max}}{e^{-2\bar{\Pi}_0(D-\Gamma)T}} e^{\frac{2\bar{\Pi}_0(D-\Gamma)}{(D+\Gamma)}[x-(D+\Gamma)t-(D-\Gamma)T]} + \Delta Q_{\max} \} \quad (57)$$

Из соотношения (39), подставив в него (57), найдем:

$$\Delta Z = \frac{(D-\Gamma)}{g\omega_0} \{ [M e^{\frac{2\bar{\Pi}_0(D-\Gamma)}{(D+\Gamma)}[x-(D+\Gamma)t-(D-\Gamma)T]} - \frac{\Delta Q_{\max}}{e^{-2\bar{\Pi}_0(D-\Gamma)T}} e^{\frac{2\bar{\Pi}_0(D-\Gamma)}{(D+\Gamma)}[x-(D+\Gamma)t-(D-\Gamma)T]} + \Delta Q_{\max}] + L e^{2\bar{\Pi}_0 x} \} \quad (58)$$

Пусть для уравнения (58) граничные условия в створе возмущения задаются в виде

$$\Delta Z = \Delta Z_{\max}, \text{ при } t = \infty, \quad x = (D-\Gamma)T, \quad (59)$$

где $\Delta Z_{\max}$ - максимальное приращение величины размыва дна русла, равное глубине местного размыва.

Подставив (59) в уравнение (58), найдем:

$$L = \frac{[\frac{g\omega_0}{(D-\Gamma)} \Delta Z_{\max} - \Delta Q_{\max}]}{e^{2\bar{\Pi}_0(D-\Gamma)T}} \quad (60)$$

Пусть для уравнения (58) граничные условия в створе возмущения задаются в виде

$$\Delta Z = 0, \text{ при } t = T, \quad x = (D-\Gamma)T. \quad (61)$$

Подставив (61) в уравнение (58), найдем:

$$M = \frac{[\Delta Q_{\max} - \frac{g\omega_0}{(D-\Gamma)} \Delta Z_{\max}]}{e^{-2\bar{\Pi}_0(D-\Gamma)T}} \quad (62)$$

Подставив параметры (60) и (62) в уравнения (57) и (58), найдем:

$$\Delta Q = \{ - \frac{g\omega_0}{(D-\Gamma)} \Delta Z_{\max} e^{\frac{2\bar{\Pi}_0(D-\Gamma)}{(D+\Gamma)}[x-(D+\Gamma)t-(D-\Gamma)T]} - \frac{[\Delta Q_{\max} - \frac{g\omega_0}{(D-\Gamma)} \Delta Z_{\max}]}{e^{-2\bar{\Pi}_0(D-\Gamma)T}} e^{-2\bar{\Pi}_0(D-\Gamma)t} + \Delta Q_{\max} \} \quad (63)$$

$$\Delta Z = \{ \frac{[\Delta Z_{\max} - \frac{(D-\Gamma)}{g\omega_0} \Delta Q_{\max}]}{e^{\frac{2\bar{\Pi}_0(D-\Gamma)}{(D+\Gamma)}[x-(D+\Gamma)t-(D-\Gamma)T]}} e^{2\bar{\Pi}_0 x} - \frac{\Delta Z_{\max}}{e^{-2\bar{\Pi}_0(D-\Gamma)T}} e^{\frac{2\bar{\Pi}_0(D-\Gamma)}{(D+\Gamma)}[x-(D+\Gamma)t-(D-\Gamma)T]} + \frac{(D-\Gamma)}{g\omega_0} \Delta Q_{\max} \} \quad (64)$$

Получена система аналитических решений (63) и (64) одномерных дифференциальных уравнений гиперболического типа динамики русловых потоков, которые могут быть применены для расчета общего размыва русла кинематическими волнами. Решения выведены для граничного условия в створе возмущения, соответствующего изменению расхода в створе возмущения по закону (42).

При расчетах параметр времени задается в секундах. При необходимости, перерасчет в сутки осуществляется после завершения расчетов.

На основе полученных решений разработана математическая модель трансформации продольных профилей рек, при сбросе воды из водохранилища.

II. Пример Расчета.

Задано. При сбросе воды из водохранилища изменение расхода в начальном створе ($x = 0$) нижнего бьефа гидроузла подчиняется закону в виде:

$$Q = Q_0 + Q_{\text{поп}} = (340 + 200) \text{ м}^3/\text{с}; \quad 0 \leq t \leq 5000 \text{ суток},$$

где $Q_0 = 340 \text{ м}^3/\text{с}$ - начальный расход при равномерном режиме течения воды в русле; $Q_{\text{поп}} = 200 \text{ м}^3/\text{с}$ - расход попуска.

Изменение величины расхода в начальном створе ($x = 0$) нижнего бьефа гидроузла подчиняется закону (42).

Рассчитать изменения расхода попуска и величины размыва дна русла в зависимости от времени в фиксированном створе $X = 5000 \text{ м}$, если в начальный момент в призматическом русле реки на расчетном участке наблюдался режим течения, близкий к равномерному. Морфометрические характеристики, гидравлические параметры и характеристики грунта

донных отложений на расчетном участке реки, соответствующие равномерному режиму течения, заданы в виде:

$$Q_0 = 340 \text{ м}^3/\text{с}, \quad U_0 = 0,858 \text{ м/с}, \quad B_0 = 96 \text{ м}, \quad H_0 = 4,129 \text{ м}, \quad R_0 = 3,802 \text{ м}, \quad m = 0, \\ n = 0,022, \quad i_0 = 0,00006, \quad \bar{W} = 0,0149 \text{ м/с}, \quad \varepsilon = 0,4, \quad \gamma = 1000 \text{ кг/м}^3, \quad \gamma' = 2650 \text{ кг/м}^3, \\ \Delta Z_{\max} = 2,5 \text{ м}.$$

III. Решение.

1. Рассчитаем значения параметров $C_{ш}$, C_0 , β , λ , Φ , $\bar{F}_0$ по формулам (4), (18), (19), (20), (21):

$$C_{ш} = \frac{1}{n} R^{1/6} = \frac{1}{0.022} 3.802^{1/6} = 56,787 \text{ м}^{0,5}/\text{с},$$

$$C_0 = \sqrt{\frac{g \omega_0}{B_0}} = \sqrt{\frac{9,81 \cdot 396,406}{96}} = 6,365 \text{ м/с},$$

$$\beta = \frac{2g}{\omega_0} \frac{Q_0}{C_{ш0}^2 R_0} = \frac{2 \cdot 9,81 \cdot 340}{396,406 \cdot 56,787^2 \cdot 3,802} = 0,001,$$

$$\lambda = \frac{Q_0^2}{\omega_0^2 C_{ш0}^2 R_0} (g - C_0^2 \Phi) = \frac{340^2}{396,406^2 \cdot 56,787^2 \cdot 3,802} (9,81 + 6,365^2 \cdot 0,297) = 0,001,$$

$$\Phi = (1 + 2\gamma) \left(-\frac{B_0}{H_0(B_0 + 2H_0)} \right) = (1 + 2 \cdot 1/6) \left(\frac{96}{(396,406 + 2 \cdot 4,129^2)} \right) = -0,297,$$

$$\bar{F}_0 = (1 - \varepsilon) \frac{(\gamma' - \gamma)}{\xi \gamma} \frac{C_{ш0}^2 \bar{W} \omega_0}{4U_0^3} = (1 - 0,4) \frac{(2650 - 1000) \cdot 56,787^2 \cdot 0,0149 \cdot 396,406}{0,057 \cdot 1000 \cdot 4 \cdot 0,858^3} = 130937$$

2. Рассчитаем значения параметров $\bar{\Pi}_0$, $\bar{C}_0$, D , Γ по формулам (34), (35), (36):

$$\begin{aligned}\bar{\Pi}_0 &= -\frac{(\lambda - \beta \bar{C}_0) \Delta Q}{\{2\bar{C}_0 [\frac{\bar{C}_0}{2} - \sqrt{(\frac{\bar{C}_0}{2})^2 + g\omega_0 \frac{(\bar{C}_0 - U_0)}{\bar{C}_0 \bar{F}_0}}] \Delta Q + 2\bar{C}_0 g\omega_0 \Delta Z\}} = \\ &= -\frac{(0,001 - 0,001 \cdot 7,223) \frac{200}{2,5}}{\{2 \cdot 7,223 [\frac{7,223}{2} - \sqrt{(\frac{7,223}{2})^2 + 9,81 \cdot 396,406 \frac{(7,223 - 0,858)}{7,223 \cdot 130937}}] \frac{200}{2,5} + 2 \cdot 7,223 \cdot 9,81 \cdot 396,406\}} = \\ &= 0,00008467\end{aligned}$$

$$\bar{C}_0 = C_0 + U_0 = 6,365 + 0,858 = 7,223 \text{ м/с},$$

$$D = \sqrt{(\frac{\bar{C}_0}{2})^2 + g\omega_0 \frac{(\bar{C}_0 - U_0)}{\bar{C}_0 \bar{F}_0}} = \sqrt{3,611^2 + 9,81 \cdot 396,406 \frac{(7,223 - 0,858)}{7,223 \cdot 130937}} = 3,615$$

$$\Gamma = \frac{\bar{C}_0}{2} = 3,611.$$

3. По формуле

$$T = \frac{X}{(D - \Gamma)} = \frac{5000}{(3,615 - 3,611)} = 1250000 \text{ секунд}$$

определяем время распространения начального возмущения до расчетного створа X.

4. Изменения расходов воды и отметок дна русла будем рассчитывать по формулам (63) и (64).

Результаты расчетов приведены в таблице 1 и на рисунках 1 и 2.

Таблица 1: Изменение расхода попуска и отметок дна русла от времени в расчетном створе X=5000м.

Время, сек.	Время, сут.	$\Delta Z_{\text{расч'}}$ м	$\Delta Q_{\text{расч'}}$ м ³ /с
1250000	0	0	0
2500000	29	1,428	114
3000000	35	1,736	139
4000000	46	2,111	169
5000000	58	2,302	184
6000000	69	2,399	192
6500000	75	2,428	194
7000000	81	2,449	196
8000000	93	2,474	198
9000000	104	2,486	199
10000000	116	2,493	199
12000000	139	2,498	200
15000000	174	2,5	200
20000000	231	2,5	200

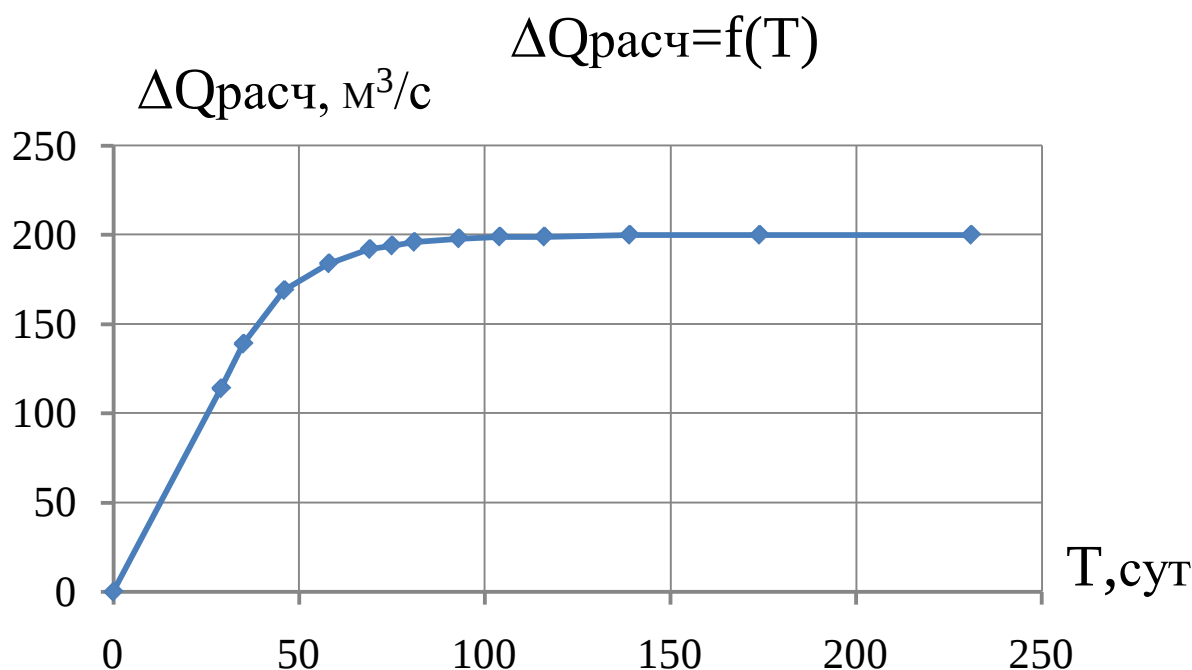


Рисунок 1: График зависимости изменения расхода попуска от времени в сутках в расчетном створе $X=5000\text{м}$.

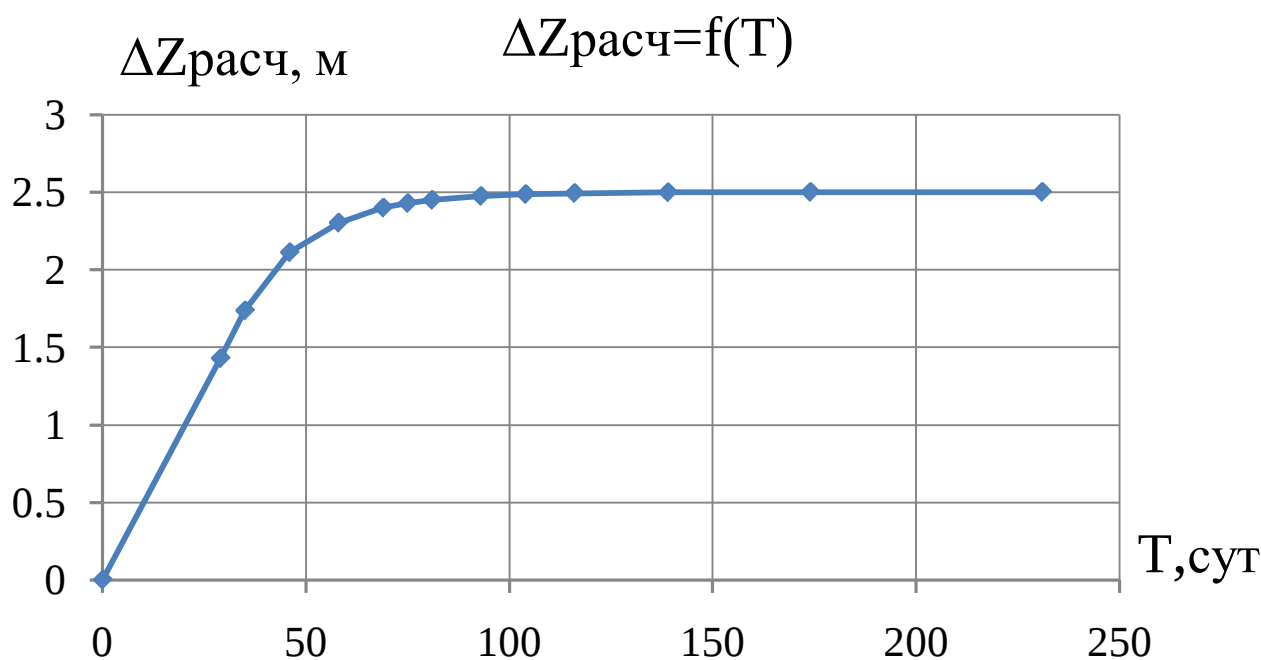


Рисунок 2: График зависимости изменения отметок дна русла от времени в сутках в расчетном створе $X=5000\text{м}$.

IV. Выводы.

1. В работе разработан аналитический метод решения одномерных линейных дифференциальных уравнений динамики русловых потоков полуограниченной протяженности для случая кинематических волн.
2. С применением теории полного интеграла выполнен гидравлический расчет изменения расхода попуска и деформации отметок дна русла от времени в расчетном створе $X=5000 \text{ м}$.

REFERENCES RÉFÉRENCES REFERENCIAS

1. Иваненко Ю.Г. Специальные задачи гидравлики рек и каналов. / Ю.Г. Иваненко, А.М. Бакштанин, А.А. Ткачев, Д.Ю. Иваненко // Москва. 2019. Изд. МЭСХ, - 220 с.
2. Иваненко, Ю.Г. Гидравлические аспекты устойчивых водных потоков в неразмываемых и размываемых руслах./Ю.Г. Иваненко, А.А. Ткачев, А.Ю. Иваненко. – Новочеркасск: Лик, 2013.– 352 с.
3. Иваненко Ю.Г. Обобщенное уравнение транспортирования потоком руслоформирующих наносов/Ю.Г. Иваненко//Гидротехника и мелиорация. 1986. -№12.-С. 22-23.
4. Гришанин К.В. Устойчивость русел рек и каналов / К.В. Гришанин. - Л. : Гидрометеиздат, 1974. – 143с.
5. Егиязаров И.В. Транспортирующая способность открытых потоков /И.В. Егиязаров // Изв. АН СССР. ОТН. 1956. №2.
6. Войнич-Сяноженцкий Т.Г. Гидродинамика устьевых участков рек и взморий бесприливных морей / Т.Г. Войнич-Сяноженцкий // Тр. / Тбилисского науч. – исслед. гидрометеорол. ин-та. Л.: Гидрометеиздат, 1972. Вып. 46 (52). – 203 с.
7. Форхгеймер Ф. Гидравлика / Ф. Форхгеймер. - М.: ОНТИ, 1935. – 615 с.
8. Ле Меоте, Б. Введение в гидродинамику и теорию волн на воде / Меоте Ле. Б. – Л. : Гидрометеиздат, 1974. – 367 с.
9. Kamke, E. Partielle differential gleichungen erster ordnung fur eine gesuchte funktion. Leipzig, 1957. 257 p.